$$= \frac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$$

$$= \frac{x + (x-2)\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

$\forall x > 0 : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

Comme : $\forall x > 0, g'(x) \geq 1$ alors $f'(x) \geq 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[1 + x\ln x - 2(\ln x)^2\right]$$

$$= 1 + 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x - 2(\ln x)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

b) f étant continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'où f réalise une bijection réciproque f^{-1} définie sur $J = f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f, \lim_{x\to+\infty} f\right[$.

$\Rightarrow J = \square$.

2) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= \frac{g(1)}{1}(x-1) + 1 = 1\times(x-1) + 1 = x$$

$\boxed{T : y = x}$

b) $x > 0, h(x) = x - 1 - \ln x$.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}. \; x > 0$$

$h'(x)$ à le signe de $(x-1)$

Tableau de signe de $h'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	−	0	+
Signe de $h'(x)$	−		+

Tableau des variations de h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - 1 - \ln x) = +\infty$$

Car $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

• h admet 0 comme minimum Absolue en 1 donc $\forall x > 0; h(x) \geq 0$

c) $f(x) - x = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$

$$= 1 - \ln^2 x + x\ln x - x$$

$$= (1 - \ln x)(1 + \ln x) + x(\ln x - 1)$$

$$= (\ln x - 1)[x - 1 - \ln x]$$

$$= (\ln x - 1).h(x)$$

$\Rightarrow f(x) - x = (\ln x - 1).h(x)$

Ou bien : on développe l'expression $(\ln x - 1).h(x)$ on trouve $f(x) - x$.

• Le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1).h(x)$ et comme $h(x) \geq 0$

Alors le signe de $f(x) - x$ est celui de $(\ln x - 1)$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn